Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas I (MA1111)
Preparador: Ricardo J. Fernández Terán (RicharOrange@hotmail.com)

SOLUCIONES EXPLICADAS DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL (20 %)

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2012 Tipo D (Horario 9-10)

1. Resolver la siguiente inecuación:

$$|x-1|-|2-x|>x$$

Solución:

Se trata de una inecuación lineal con valor absoluto por lo que hay que comparar con cero analizando por casos:

La expresión $|x-1|$ cambia en $x=1$, y la expresión $|2-x|$ cambia en $x=2$, así que los puntos críticos son $\{1;\ 2\}$, por lo que los posibles casos son:

Caso I: $x \le 1 \implies \begin{cases} |x-1| = -(x-1) \\ |2-x| = 2-x \end{cases}$

$$|x-1|-|2-x|>x \quad \implies \quad -(x-1)-(2-x)>x \quad \implies \quad x<-1$$

$$\mathbf{Sol_1} = (-\infty,-\mathbf{1}) \cap (-\infty,\mathbf{1}] = (-\infty,-\mathbf{1})$$

Caso II: $1 < x \le 2 \implies \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |2-x| = 2-x \end{cases}$

$$|x-1|-|2-x|>x \quad \implies \quad (x-1)-(2-x)>x \quad \implies \quad x>3 \implies \mathbf{Sol_2} = (\mathbf{3},+\infty) \cap (\mathbf{1},\mathbf{2}] = \emptyset$$

Caso III: $x > 2 \implies \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |2-x| = -(2-x) \end{cases}$

$$|x-1|-|2-x|>x \quad \implies \quad (x-1)-[-(2-x)]>x \quad \implies \quad x<1 \implies \mathbf{Sol_3} = (-\infty,\mathbf{1}) \cap (\mathbf{2},+\infty) = \emptyset$$

Sabemos entonces que:	$\mathbf{SOLUCIÓN} \equiv \mathbf{Sol_1} \cup \mathbf{Sol_2} \cup \mathbf{Sol_3} = (-\infty,-\mathbf{1})$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(0,1)$ $Q(0,3)$ y $R(2,4)$

Solución:

Si los tres puntos pertenecen a la curva entonces satisfacen su ecuación. Planteo una ecuación arbitraria $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ y como tengo tres puntos, sustituyo sus coordenadas en la ecuación, de donde obtengo un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (A,B,C) para luego factorizar y llegar a la ecuación canónica.

Planteando y resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(0)^2+(1)^2+A(0)+B(1)+C=0\\(0)^2+(3)^2+A(0)+B(3)+C=0\\(2)^2+(4)^2+A(2)+B(4)+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B+C+1=0\\3B+C+9=0\\2A+4B+C+20=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-7/2\\B=-4\\C=3\end{cases}$$

Así, la ecuación expandida de la circunferencia será:

$$x^2+y^2-\frac{7}{2}x-4y+3=0 \quad\Rightarrow\quad \left(x-\frac{7}{4}\right)^2+(y-2)^2=-3+\left(\frac{7}{4}\right)^2+(2)^2$$

Llevamos finalmente a la forma canónica completando cuadrados y factorizando:

$$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+(y-2)^2=\frac{65}{16}\qquad \text{Centro}=(7/4\,;\,2)\qquad \text{Radio}=\frac{\sqrt{65}}{4}$$

Así, la ecuación canónica de la circunferencia pedida será: $\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+(y-2)^2=\frac{65}{16}}$

Nota: Existe un procedimiento alternativo para resolver este ejercicio, que consiste en hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a las cuerdas $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ para luego hallar sus perpendiculares e intersectarlas para buscar el centro y luego hallar el radio como la distancia a cualquiera de los puntos dados, pero en mi opinión este método resultaba más largo y tedioso, y tenía la peculiaridad que la recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$ no se puede escribir en la forma $y=mx+b$ porque tendría pendiente "infinita", sino que debe escribirse como $\alpha x+\beta y+\psi=0$. Los resultados son los mismos y <u>ambos</u> procedimientos *deberían* ser aceptados.

3. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } x<1\\-x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-x-3 & \text{si } x<-1\\x-1 & \text{si } x\geq -1\end{cases}$$

a) Bosqueje las gráficas de ambas funciones.
b) Determine $\text{Dom}(f\circ g)$
c) Encuentre una expresión para $f\circ g$

<u>Solución:</u> *(Las gráficas se encuentran en la siguiente página)*

(Las gráficas se encuentran en la siguiente página)

Notemos que $\text{Dom}(f)=\text{Dom}(g)=\mathbb{R}$, $\text{Rg}(g)=[-2,+\infty)$ con lo que $\text{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}$, ya que se tiene que $\forall x\in\text{Dom}(g)\ \rightarrow g(x)\in\text{Dom}(f)$.

La composición se realiza sustituyendo literalmente:

$$f\circ g=f\big(g(x)\big)=\begin{cases}g(x)+2 & \text{si } g(x)<1\\-[g(x)]^2 & \text{si } g(x)\geq 1\end{cases}$$

Ahora calculamos los intervalos de definición en términos del dominio de la función interna:

$$g(x)<1\longrightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Si } x\in(-\infty,-1) & -x-3<1\Rightarrow\ x>-4 & \Rightarrow\ (-4,+\infty)\cap(-\infty,-1)=(-4,-1)\\ \text{Si } x\in[-1,+\infty) & x-1<1\ \Rightarrow\ x<2 & \Rightarrow\ (-\infty,2)\cap[-1,+\infty)=[-1,2)\end{matrix}\right\rangle$$

$$g(x)<1 \text{ si } x\in(-4,-1)\cup[-1,2)\ \longrightarrow\qquad \boldsymbol{g(x)<1\Leftrightarrow -4<x<2}$$

$$g(x)\geq 1\longrightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Si } x\in(-\infty,-1) & -x-3\geq 1\Rightarrow\ x\leq -4 & \Rightarrow(-\infty,-4]\cap(-\infty,-1)=(-\infty,-4]\\ \text{Si } x\in[-1,+\infty) & x-1\geq 1\ \Rightarrow\ x\geq 2 & \Rightarrow\ [2,+\infty)\end{matrix}\right\rangle$$

$$g(x)\geq 1 \text{ si } x\in(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)\ \longrightarrow\qquad \boldsymbol{g(x)\geq 1\Leftrightarrow x\leq -4\vee x\geq 2}$$

Para expresar la composición debo evaluar también $g(x)$ según sus intervalos de definición e intersectar con el dominio de la función compuesta.

Por tanto, la expresión final para la función compuesta será:

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}(-x-3)+2 & \text{si } -4<x<-1\\ (x-1)+2 & \text{si } -1\le x<2\\ -(-x-3)^2 & \text{si } x\le -4\\ -(x-1)^2 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Respuesta: $$\boldsymbol{(f\circ g)(x)=\begin{cases}-x-1 & \textbf{si } -4<x<-1\\ x+1 & \textbf{si } -1\le x<2\\ -(-x-3)^2 & \textbf{si } x\le -4\\ -(x-1)^2 & \textbf{si } x\ge 2\end{cases}}$$

Nota: $-(-x-3)^2=-(x+3)^2$ $\longrightarrow$ también es válido colocarlo así.

Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$: